Aufgabe 2 und 3 - Pflichtteil

In einer der Aufgaben 2 oder 3 soll fast immer eine Stammfunktion gefunden oder der Wert eines Integrals ausgerechnet werden.

In der anderen Aufgabe soll zumeist die Lösung einer Gleichung (häufig quadratisch) gefunden werden.

Fähigkeiten für „Integralaufgabe“

Für die „Integralaufgabe“ müssen Sie die entsprechenden Integrationsregeln kennen, nämlich:

- Das Bestimmen einer Stammfunktion.
  Sie müssen also elementare Funktionen „aufleiten“ können.
  Insbesondere sollten Sie die Potenzregel für Integrale kennen.
- Die „Kettenregel rückwärts“, genauer: Lineare Substitution
- den „Hauptsatz“ (der Differenzial- und Integralrechnung)

Sie sollten außerdem das Bestimmen einer Fläche mit Hilfe von Integralen beherrschen.

Elementare Integrale

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)$
c	$cx + C$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\mid x \mid) + C$
e^x	$e^x + C$

Rechenregeln für Integrale

Bezeichnung	**Rechenregel**
Summenregel	$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
Konstanter Faktor	$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$
Kettenregel „rückwärts“	$\int f\big(g(x)\big)dx = \frac{F\big(g(x)\big)}{g'(x)} + C$ Nur wenn $g(x)$ linear ist, d.h. $g(x) = mx + b$ gilt!

$$\int f\big(g(x)\big)dx = \frac{F\big(g(x)\big)}{g'(x)} + C$$

Aufgaben

PT 2010 - Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right) dx$. (2 VP)

PT 2009 - Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Integral $\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$. (2 VP)

PT 2008 - Aufgabe 2:

G ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = 2 - 3 \cdot \sin(4x)$.

Der Punkt $P(0|1)$ liegt auf dem Schaubild von G.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G. (2 VP)

Lösungen

Lösung PT 2010 - Aufgabe 2:

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4\mathrm{x}\right) dx = [2\ln(|\ x\ |) + 2\mathrm{x}^2]_1^e = (2 \cdot 1 + 2e^2) - (2 \cdot 0 + 2) = 2e^2$$

Lösung PT 2009 - Aufgabe 2:

$$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_4^9 \left(2 \cdot x^{-1/2} - 1\right) dx = \left[2 \cdot \frac{1}{1/2} x^{1/2} - x\right]_4^9$$

$$= [4\sqrt{x} - x]_4^9 = \left(4\sqrt{9} - 9\right) - \left(4\sqrt{4} - 4\right) = 3 - 4 = -1$$

Lösungen

Lösung PT 2008 - Aufgabe 2:

Bilde zunächst eine Stammfunktion:

$$G(x) = \int \left(2 - 3 \cdot \sin(4x)\right) dx = 2x + \frac{3}{4}\cos(4x) + C$$

Da $P(0|1)$ auf G liegt folgt $G(0) = 1$, also

$$1 = \frac{3}{4}\cos(0) + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$$

Daraus ergibt sich der gesuchte Funktionsterm:

$$\underline{G(x) = 2x + \frac{3}{4}\cos(4x) + \frac{1}{4}}$$